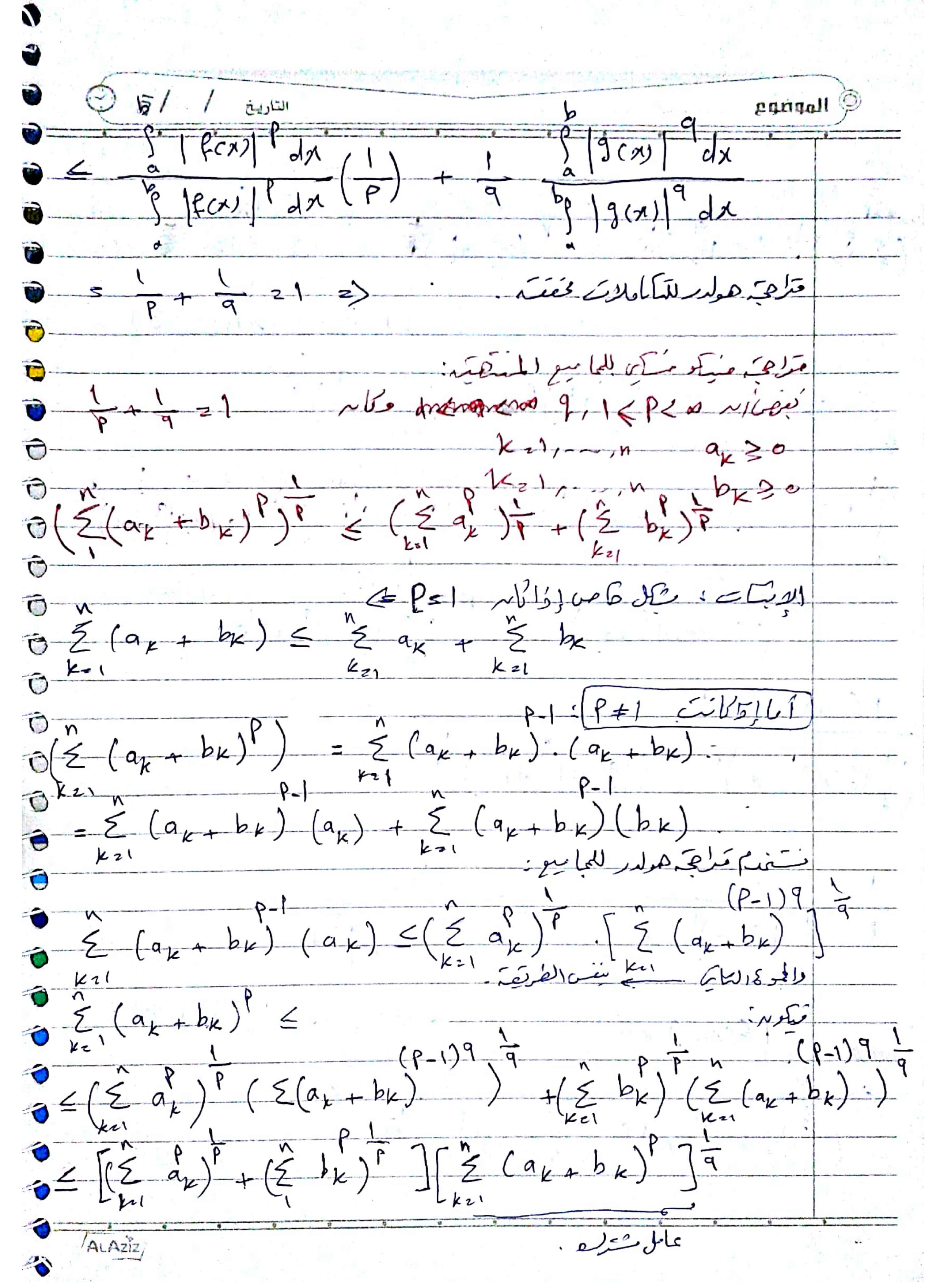


الموضوع   التاريخ / /

$$\le \frac{\int_a^b |f(x)|^p\,dx}{\int_a^b |f(x)|^p\,dx}\left(\frac{1}{p}\right) + \frac{1}{q}\,\frac{\int_a^b |g(x)|^q\,dx}{\int_a^b |g(x)|^q\,dx}$$

$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow$ متراجحة هولدر للتكاملات محققة.

متراجحة منيكوفسكي للمجاميع المنتهية:

نفرض أن $q, 1<p<\infty$ وكان $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$a_k \ge 0 \quad k=1,\dots,n$

$b_k \ge 0 \quad k=1,\dots,n$

$$\left(\sum_{1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

الإثبات: بشكل خاص إذا كان $p=1 \Leftarrow$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) \le \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

أما إذا كانت $p \neq 1$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right) = \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{p-1}\cdot(a_k+b_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{p-1}(a_k) + \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{p-1}(b_k)$$

نستخدم متراجحة هولدر للمجاميع:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{p-1}(a_k) \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}$$

والمجموع الثاني بنفس الطريقة.

فيكون:

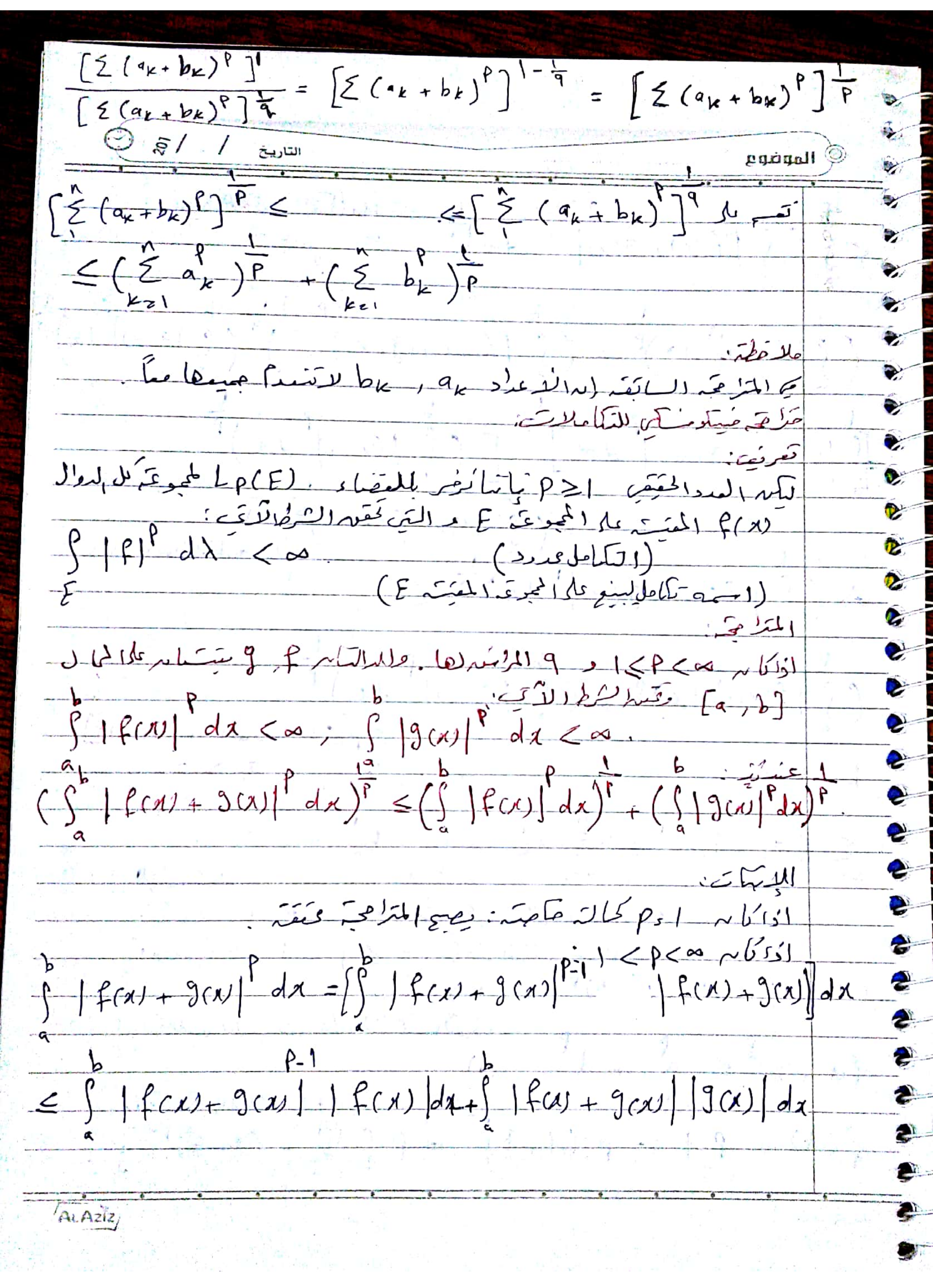
$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum(a_k+b_k)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right]^{\frac{1}{q}}$$

عامل مشترك.

ALAZiZ



$$\frac{\left[\sum (a_k+b_k)^p\right]^{1}}{\left[\sum (a_k+b_k)^p\right]^{\frac{1}{q}}} = \left[\sum (a_k+b_k)^p\right]^{1-\frac{1}{q}} = \left[\sum (a_k+b_k)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

التاريخ / / 201 الموضوع

تحصل على $\Leftarrow \left[\sum_{1}^{n} (a_k+b_k)^p\right]^{\frac{1}{q}}$

$$\left[\sum_{1}^{n} (a_k+b_k)^p\right]^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ملاحظة:

في المتراجحة السابقة إن الأعداد a_k ، b_k لا تنعدم جميعها معاً.

متراجحة منكوفسكي للتكاملات:

تعريف:

ليكن العدد الحقيقي $p \ge 1$ يرمز بالفضاء $L_p(E)$ لمجموعة كل الدوال $f(x)$ المعرفة على المجموعة E والتي تحقق الشرط الآتي:

$$\int_E |f|^p \, dx < \infty$$

(التكامل محدود)

(اسمه تكامل لبيغ على المجموعة المعرفة E)

المتراجحة:

إذا كان $1 \le p < \infty$ و q المرافق لها. والدالتان f, g تستطيعان على الفترة $[a,b]$ وتحقق الشرط الآتي:

$$\int_a^b |f(x)|^p \, dx < \infty \;,\; \int_a^b |g(x)|^p \, dx < \infty .$$

عندئذ:

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

البرهان:

إذا كان $p=1$ كحالة خاصة: يصبح المتراجحة محققة.

إذا كان $1 < p < \infty$

$$\int_a^b |f(x)+g(x)|^p \, dx = \int_a^b \left[|f(x)+g(x)|^{p-1} \, |f(x)+g(x)|\right] dx$$

$$\le \int_a^b |f(x)+g(x)|^{p-1} \, |f(x)| \, dx + \int_a^b |f(x)+g(x)|^{p-1} \, |g(x)| \, dx$$

AL Aziz

تطبيق هولدر للتكاملات:

$$\le \left[\int_a^b |f(x)+g(x)|^{\overbrace{q(p-1)}^{p}} dx \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{\overbrace{q(p-1)}^{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]$$

نقسم على العامل المشترك:

$$\Rightarrow \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

[8] اذا كان العدد $0 < p \le 1$ وكانت:

$a_k \ge 0$ ، $b_k \ge 0$ حيث: $k = 1, 2, \dots, n$

فإن:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \le \sum_{k=1}^{n} a_k^p + \sum_{k=1}^{n} b_k^p$$

الإثبات:

اذا كان $p = 1$ تؤول المتراجحة إلى مساواة فتكون صحيحة.

أما من أجل $0 < p < 1$: نأخذ الدالة المساعدة الآتية:

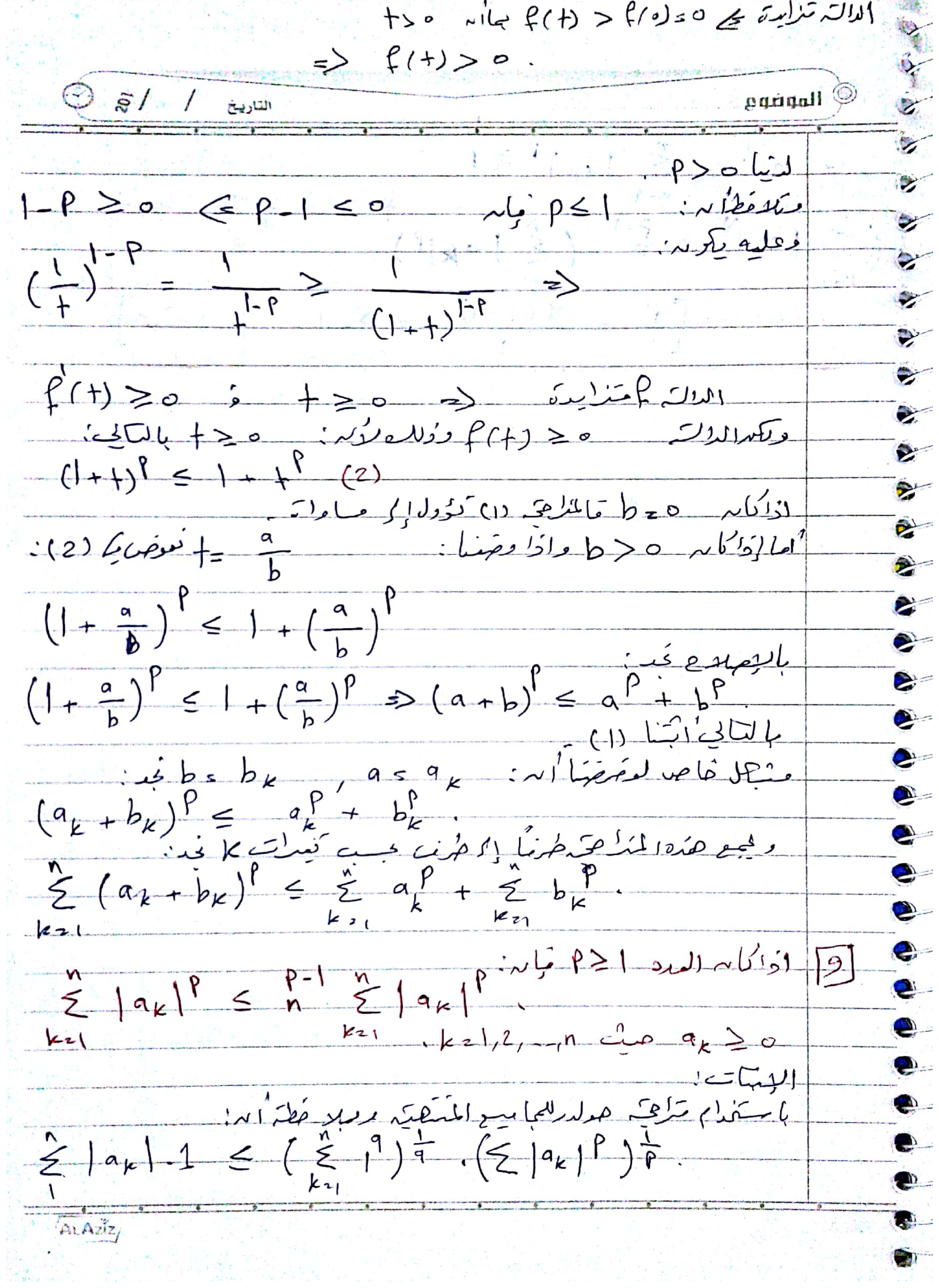
$$f(t) = 1 + t^p - (1+t)^p \; ; \; t \ge 0$$

وذلك للإثبات على المتراجحة الآتية:

$$(a+b)^p \le a^p + b^p . \quad (1)$$

باشتقاق الدالة $f(t)$:

$$f'(t) = p t^{p-1} - p(1+t)^{p-1} = p \left[t^{p-1} - (1+t)^{p-1} \right] .$$



الدالة تزايدية في $t>0$ وبما أن $f(t) > f(0) = 0$

$\Rightarrow f(t) > 0.$

لدينا $p>0$.

ومن الافتراض: $p \le 1$ فإن $p-1 \le 0 \Rightarrow 1-p \ge 0$

وعليه يكون:

$$\left(\frac{1}{t}\right)^{1-p} = \frac{1}{t^{1-p}} \ge \frac{1}{(1+t)^{1-p}} \Rightarrow$$

الدالة f متزايدة $\Leftarrow$ $t \ge 0$ في $f'(t) \ge 0$

ويكون الدالة $f(t) \ge 0$ وذلك لأن: $t \ge 0$ بالتالي:

$$(1+t)^p \le 1 + t^p \quad (2)$$

إذا كان $b=0$ فالمتراجحة (1) تتحول إلى مساواة.

أما إذا كان $b>0$ وإذا وضعنا: $t = \frac{a}{b}$ نعوض في (2):

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^p \le 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^p$$

بالإصلاح نجد:

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^p \le 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^p \Rightarrow (a+b)^p \le a^p + b^p.$$

بالتالي أثبتنا (1).

في شكل خاص لو فرضنا أن: $a = a_k$, $b = b_k$ نجد:

$$(a_k + b_k)^p \le a_k^p + b_k^p.$$

وبجمع هذه المتراجحة طرفاً إلى طرف بحسب تغيرات k نجد:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \le \sum_{k=1}^{n} a_k^p + \sum_{k=1}^{n} b_k^p.$$

[9] إذا كان العدد $p \ge 1$ فإن:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \le n^{p-1} \sum_{k=1}^{n} |a_k|^p ,$$

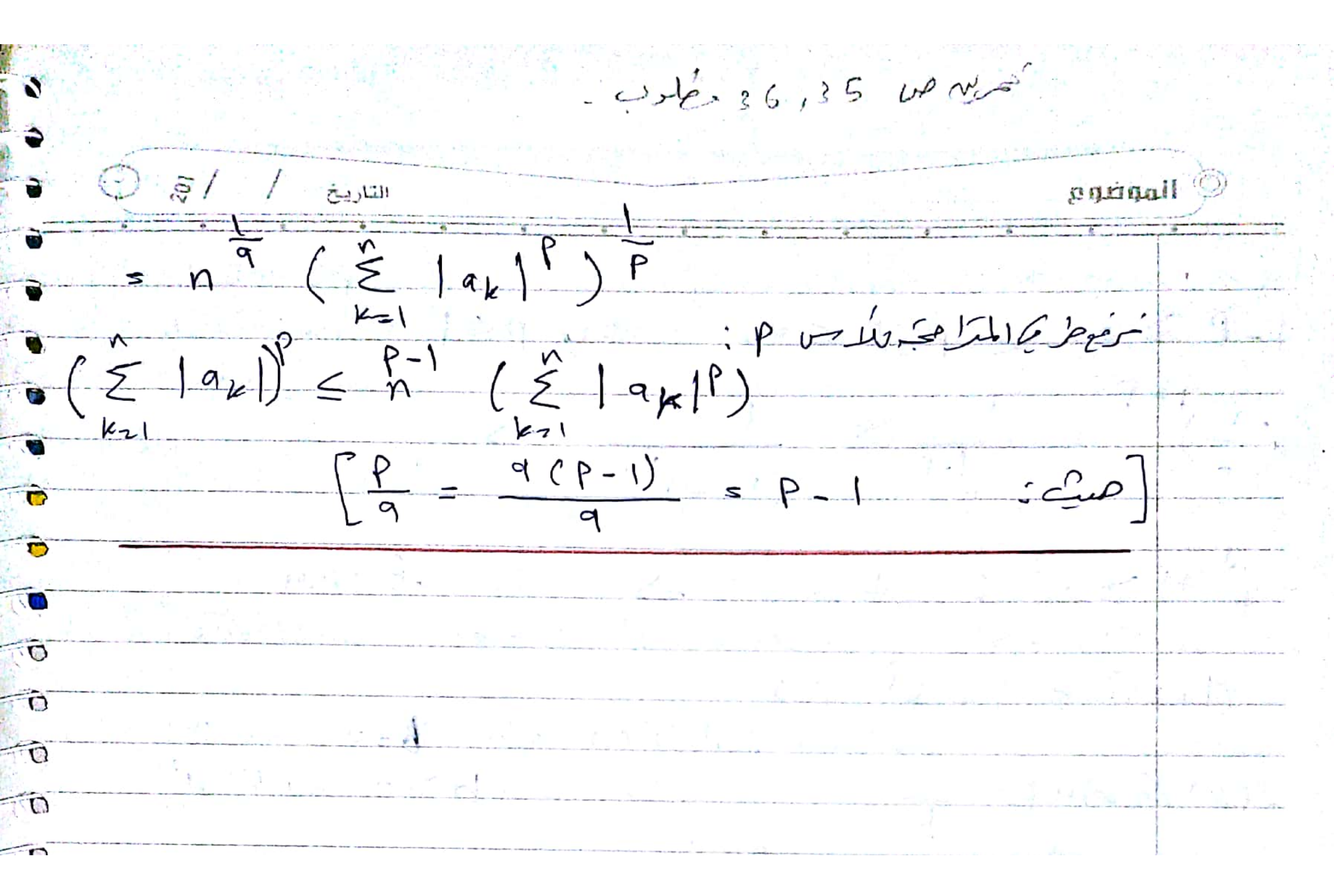
حيث $a_k \ge 0$, $k=1,2,\dots,n$.

الإثبات:

باستخدام متراجحة هولدر للمجاميع المنتهية ومع ملاحظة أن:

$$\sum_{1}^{n} |a_k| \cdot 1 \le \left(\sum_{k=1}^{n} 1^q\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

ALAziz



تمرين ص 35 ,36 مطلوب .

الموضوع

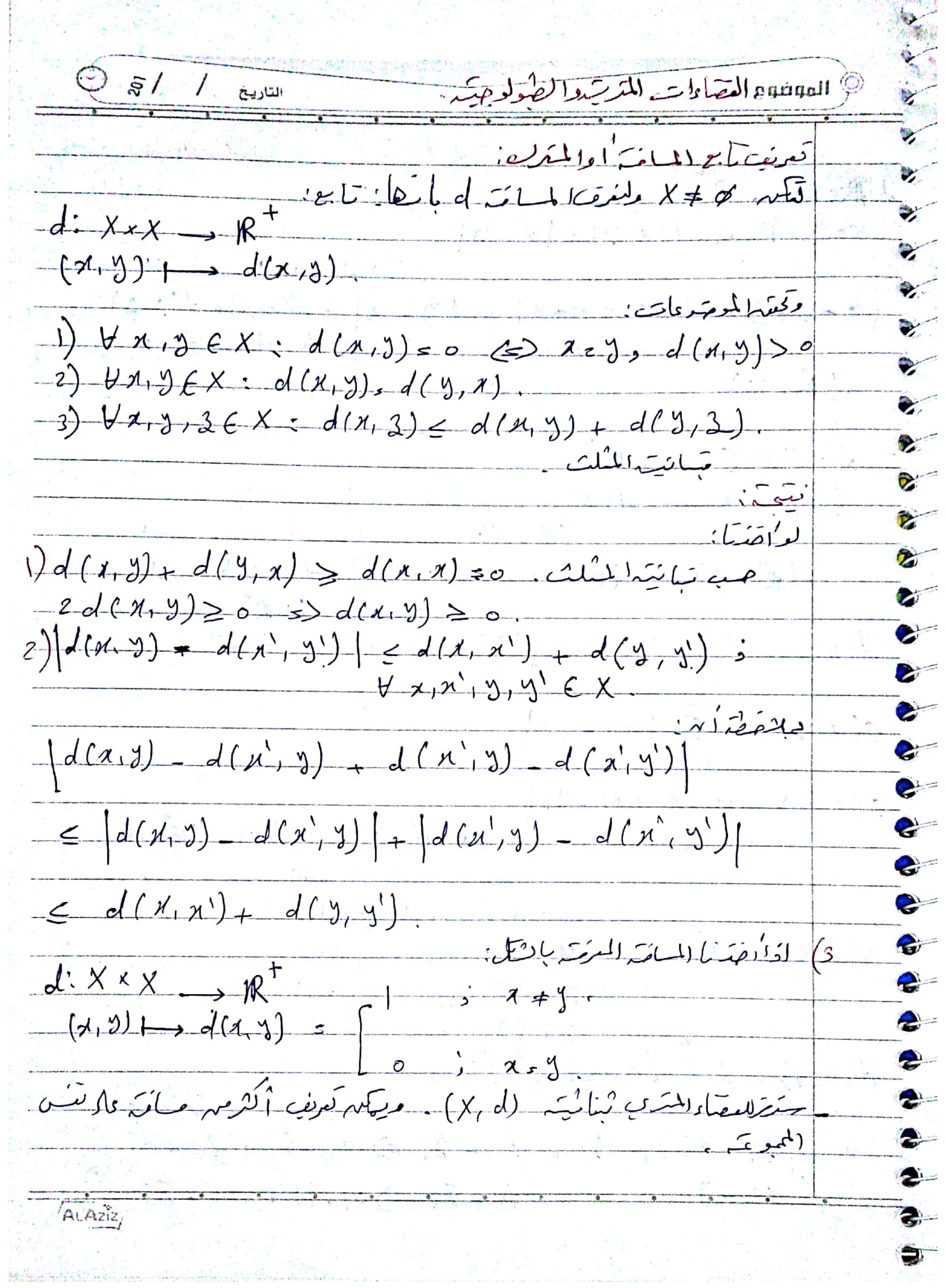
التاريخ / / 201

$$= n^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

نرفع طرفي المتراجحة للأس p :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k| \right)^p \le n^{p-1} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)$$

حيث : $\left[\frac{p}{q} = \frac{q(p-1)}{q} = p-1 \right]$



تعريف تابع المسافة أو المترك:

لتكن $X \neq \emptyset$ ولنعرف المسافة d بأنها: تابع:

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$(x,y) \longmapsto d(x,y).$$

وتحقق الموضوعات:

1) $\forall x,y \in X : d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $d(x,y) > 0$

2) $\forall x,y \in X : d(x,y) = d(y,x)$.

3) $\forall x,y,z \in X : d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

متباينة المثلث.

نتيجة:

لو أخذنا:

1) $d(x,y) + d(y,x) \geq d(x,x) = 0$ حسب متباينة المثلث.

$2d(x,y) \geq 0 \Rightarrow d(x,y) \geq 0$.

2) $|d(x,y) - d(x',y')| \leq d(x,x') + d(y,y')$; $\forall x,x',y,y' \in X$.

ملاحظة أن:

$$|d(x,y) - d(x',y) + d(x',y) - d(x',y')|$$
$$\leq |d(x,y) - d(x',y)| + |d(x',y) - d(x',y')|$$
$$\leq d(x,x') + d(y,y').$$

3) إذا أخذنا المسافة المعرفة بالشكل:

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$(x,y) \longmapsto d(x,y) = \begin{cases} 1 & ; x \neq y. \\ 0 & ; x = y. \end{cases}$$

سنرمز للفضاء المتري كثنائية (X,d). ويمكن تعريف أكثر من مسافة على نفس المجموعة.

ALAziz

بعض الأمثلة:

① $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$(x, y) \longmapsto d(x, y) = |x - y|$.

الإثبات: الخاصة الثالثة:

$|x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$.

فيسمى الفضاء المتري الحقيقي المألوف نرمز له ب:

$(\mathbb{R}, |\,|)$.

② $d: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$(z, w) \longmapsto d(z, w) = |z - w|$.

يسمى الفضاء المتري العقدي $(\mathbb{C}, d)$.

③ الفضاء المتري $(\mathbb{R}^n, d)$ والفضاء $(\mathbb{R}^n, e)$ و $(\mathbb{R}^n, c)$.

لنعرف على $\mathbb{R}^n$ المسافات الآتية:

$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ ، $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

تثبت باستخدام متباينة منكوفسكي من أجل $P = 2$

$e(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

$c(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$

كلاً $(\mathbb{R}^n, c)$ ، $(\mathbb{R}^n, e)$ ، $(\mathbb{R}^n, d)$

- فضاءات مترية أقليدية ذات n بعد.

- إثبات متراجحة المثلث في المسافة الأولى:

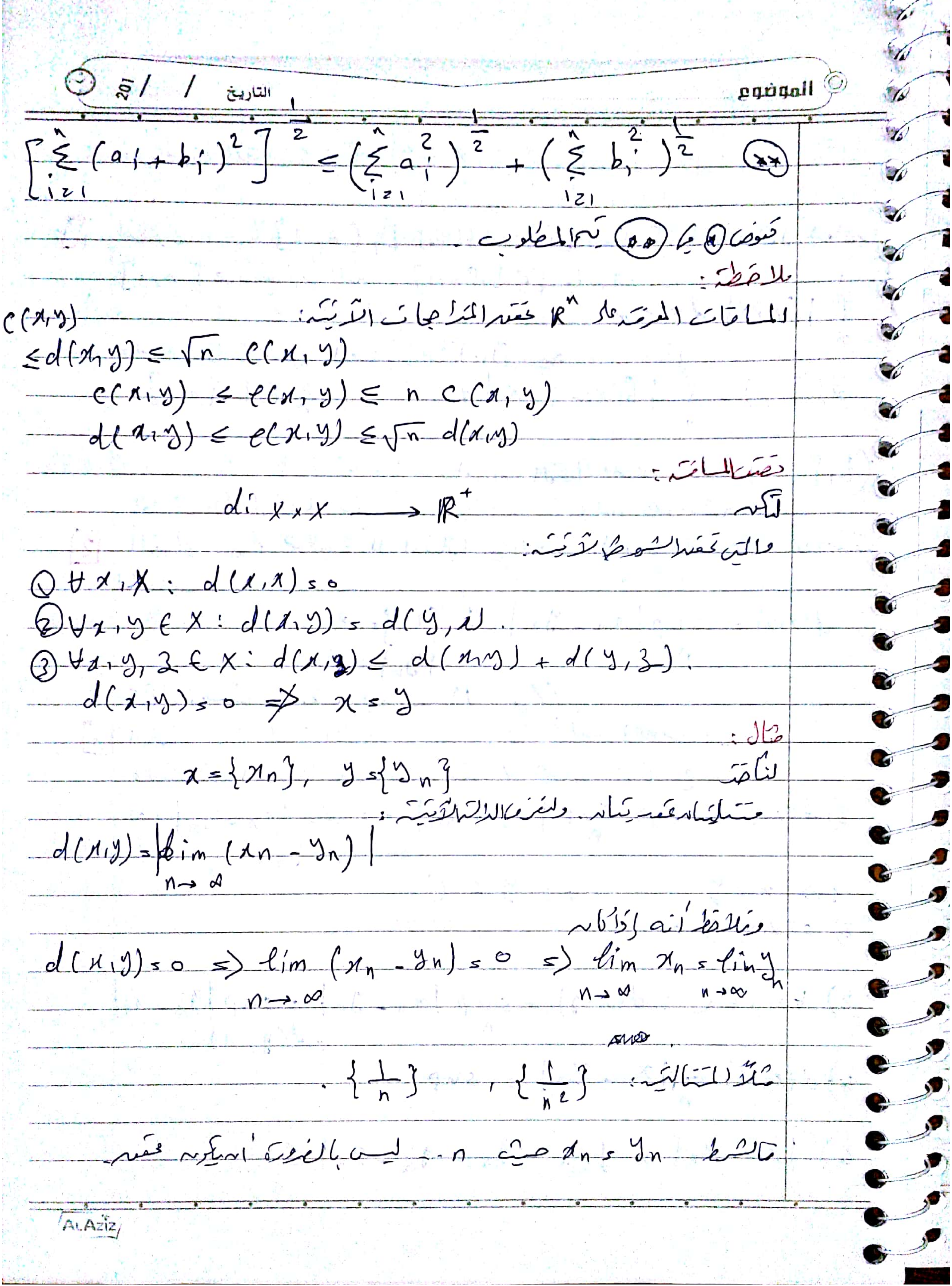
$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$.
$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$
$z = (z_1, \longrightarrow z_n)$.

$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

ضع إذاً:

④ $a_i = y_i - x_i$ ، $b_i = z_i - y_i \Rightarrow a_i + b_i = z_i - x_i$

أو $x_i - y_i$ أو $y_i - z_i \Rightarrow a_i + b_i = x_i - z_i$



$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (**)$$

نعوض (*) في (**) ينتج المطلوب.

ملاحظة:

المسافات المعرفة على $\mathbb{R}^n$ تحقق المتراجحات الآتية:

$$c(x,y) \le d(x,y) \le \sqrt{n}\, c(x,y)$$

$$c(x,y) \le e(x,y) \le n\, c(x,y)$$

$$d(x,y) \le e(x,y) \le \sqrt{n}\, d(x,y)$$

شبه المسافة:

لتكن $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$

والتي تحقق الشروط الآتية:

1. $\forall x \in X: d(x,x) = 0$
2. $\forall x,y \in X: d(x,y) = d(y,x)$.
3. $\forall x,y,z \in X: d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$.

$$d(x,y) = 0 \not\Rightarrow x = y$$

مثال:

لتأخذ $x = \{x_n\}, \; y = \{y_n\}$

متتاليتان متقاربتان. ولنعرف الدالة الآتية:

$$d(x,y) = \left|\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n)\right|$$

ونلاحظ أنه إذا كان

$$d(x,y) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

مثلاً المتتاليتين: $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}, \left\{\frac{1}{n}\right\}$.

فالشرط $x_n = y_n$ حيث n ليس بالضرورة أن يكون محقق

أي ليس بالضرورة يحقق $x = y$.

مثال:

1) لنرمز $L_1[0,1]$ لفضاء الدوال القابلة للمكاملة على المجال المغلق $[0,1]$ عندئذٍ أيا كان $f \in L_1[0,1]$ فإن

$$\int_0^1 |f(x)|\, dx < \infty$$

ولنعرف مسافة على هذا الفضاء بالشكل الآتي:

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx \;;\; \forall f, g \in L_1[0,1].$$

فيكون الفضاء متري: $(L_1[0,1], d)$

اذا كان التكامل تكامل ريمان أما إذا كان تكامل ليبغ فهو شبه متري.

2) الفضاء l_∞ هو مجموعة كل المتتاليات الحقيقية المحدودة ولنعرف على هذه المجموعة المسافة:

$$d(x,y) = \sup_n |x_n - y_n| \;;\; \{x_n\} = x ,\; \{y_n\} = y.$$

تشكل ما سبق فضاء متري (l_∞, d).

3) الفضاء C_0 مجموعة المتتاليات المتقاربة إلى الصفر (الصفرية).

ولنبين (C, d) فضاء متري حيث d هي المعرفة في ②.

1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sup_n |x_n - y_n| = 0 \Leftrightarrow |x_n - y_n| = 0 \Leftrightarrow x_n = y_n$

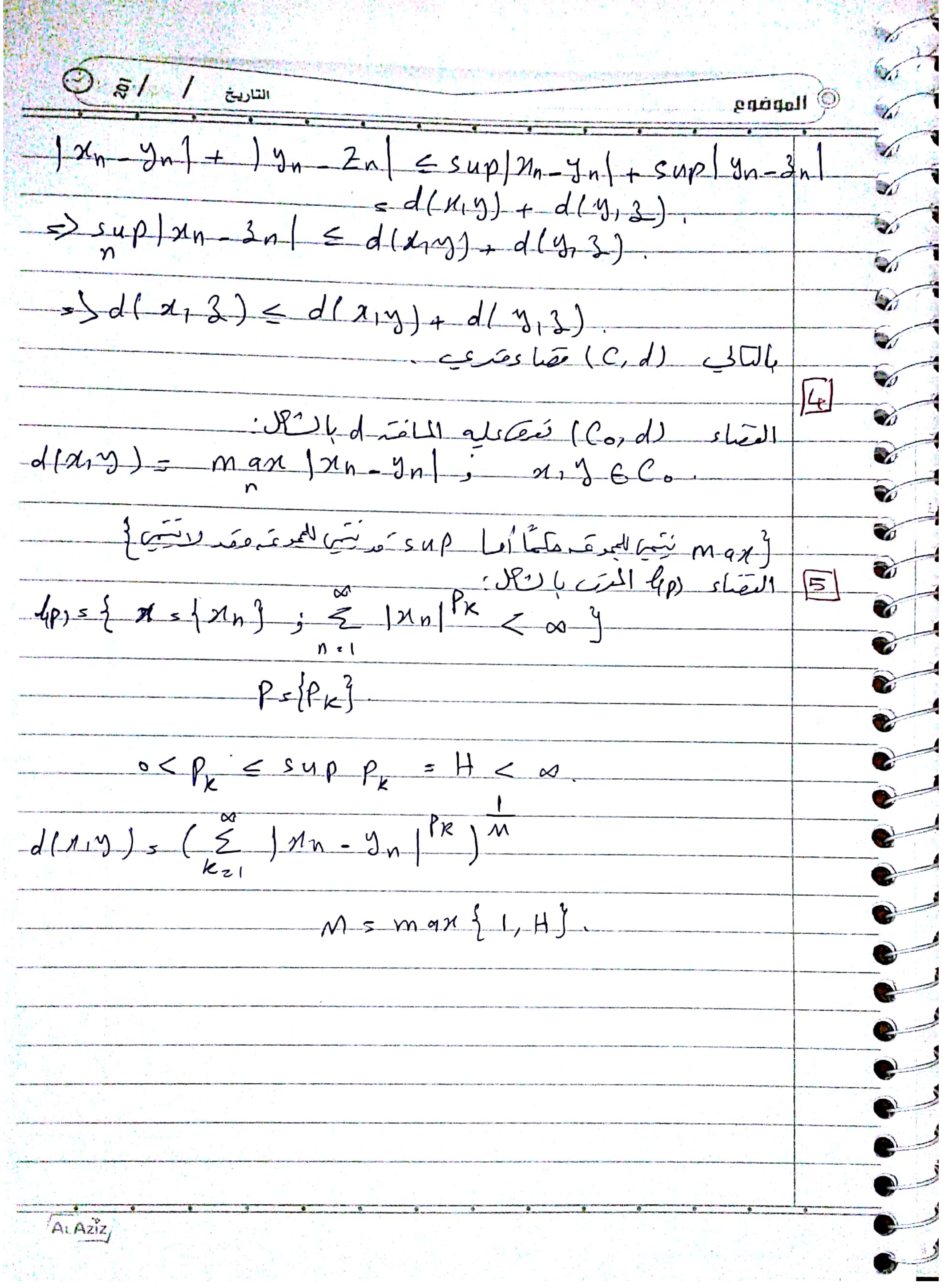
$\Leftrightarrow x = y , \quad ; \forall x, y \in C .$

2) $d(x,y) > 0$.

3) $\forall x, y \in C : d(x,y) = \sup_n |x_n - y_n| = \sup |y_n - x_n| = d(y,x)$.

~~4) $d(x,z) = \sup_n |x_n - z_n| = \sup$~~

4) $|x_n - z_n| = |x_n - y_n + y_n - z_n| \leq$



$$|x_n - y_n| + |y_n - z_n| \le \sup|x_n - y_n| + \sup|y_n - z_n|$$
$$= d(x,y) + d(y,z).$$

$$\Rightarrow \sup_n |x_n - z_n| \le d(x,y) + d(y,z).$$

$$\Rightarrow d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z).$$

بالتالي (C,d) فضاء متري.

[4]

الفضاء (C_0, d) نعرف عليه المسافة d بالشكل:

$$d(x,y) = \max_n |x_n - y_n| \; ; \quad x,y \in C_0 .$$

{max ينتمي للمجموعة بينما أما sup قد ينتمي للمجموعة وقد لا ينتمي}

[5]

الفضاء $l(p)$ المعرف بالشكل:

$$l(p) = \{ x = \{x_n\} \; ; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{p_k} < \infty \}$$

$$p = \{p_k\}.$$

$$0 < p_k \le \sup p_k = H < \infty .$$

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_n - y_n|^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}}$$

$$M = \max\{1, H\}.$$